ELEMENTI DI INFORMATICA TEORICA

Parte 1:
Logica Matematica

1.1 Inferenze logiche

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica
Università della Calabria

2 marzo 2022

Anno Accademico 2021/2022

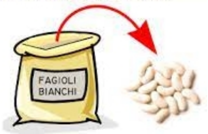
Inferenze Logiche

Distinguiamo tre tipologie di inferenza o di ragionamento:

- **Deduzione**
- **Induzione**
- **Abduzione**

Il filosofo e logico statunitense **Charles Sanders Peirce** (1839-1914) ha espresso queste tre tipologie di inferenze logiche

- in base all'ordine in cui si susseguono il **caso** (o ipotesi), il **risultato** (o fatto), la **regola** (o legge generale);
- attraverso l'**esempio del sacco di fagioli**.



Inferenze Logiche

Tuttavia, la distinzione risale ad **Aristotele** (384-322 a.C.), che ne parla negli *Analitici primi* e negli *Analitici secondi*.

Analitici secondi, 81a 40-81b 9

«noi impariamo o per **induzione**, o mediante **dimostrazione**. Orbene, la dimostrazione parte da **proposizioni universali**, mentre l'induzione si fonda su **proposizioni particolari**; non è tuttavia possibile cogliere le proposizioni universali, se non attraverso l'induzione, poiché anche le nozioni ottenute per astrazione saranno rese note mediante l'induzione, quando cioè si provi che alcune determinazioni appartengono ad un singolo genere in quanto tale, sebbene non risultino separabili dagli oggetti della sensazione. D'altro canto, è impossibile che chi non possiede sensazione venga guidato induttivamente. La sensazione si rivolge infatti agli oggetti singolari: in tal caso, non è possibile acquistare la scienza di questi oggetti, dato che da proposizioni universali non la si può trarre senza induzione, e che mediante l'induzione non la si può raggiungere senza la sensazione».

Deduzione

- *Deduzione* dal latino *de-ducere*, "condurre da" o "condurre giù".
- La deduzione è stata classicamente definita come una inferenza che conduce dall'**universale** al **particolare**.

Deduzione

- *Deduzione* dal latino *de-ducere*, "condurre da" o "condurre giù".
- La deduzione è stata classicamente definita come una inferenza che conduce dall'**universale** al **particolare**.

Esempio di C. S. Peirce

Regola	Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi
Caso	Questi fagioli vengono da questo sacchetto
Risultato	Questi fagioli sono bianchi

Deduzione

- *Deduzione* dal latino *de-ducere*, “condurre da” o “condurre giù".
- La deduzione è stata classicamente definita come una inferenza che conduce dall'**universale** al **particolare**.

Esempio di C. S. Peirce

Regola	Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi
Caso	Questi fagioli vengono da questo sacchetto
Risultato	Questi fagioli sono bianchi

Esempio classico

1. **Premessa universale**: Tutti gli uomini sono mortali
2. **Conoscenza particolare**: Socrate è un uomo
3. **Conseguenza particolare**: Socrate è mortale

Deduzione

- Nei due esempi: il risultato o la conseguenza sono conclusioni **necessarie** a partire dalle premesse.
- La deduzione ha anche un'altra accezione in ambito logico.
- Date certe premesse si passa a conseguenze che sono necessarie.

Deduzione

- Nei due esempi: il risultato o la conseguenza sono conclusioni **necessarie** a partire dalle premesse.
- La deduzione ha anche un'altra accezione in ambito logico.
- Date certe premesse si passa a conseguenze che sono necessarie.
- In tal caso si può passare da affermazioni universali ad altre affermazioni altrettanto universali.
- La deduzione come **inferenza non ampliativa ma necessaria**.

Deduzione

- Nei due esempi: il risultato o la conseguenza sono conclusioni **necessarie** a partire dalle premesse.
- La deduzione ha anche un'altra accezione in ambito logico.
- Date certe premesse si passa a conseguenze che sono necessarie.
- In tal caso si può passare da affermazioni universali ad altre affermazioni altrettanto universali.
- La deduzione come **inferenza non ampliativa ma necessaria**.

Esempio: Sillogismo aristotelico (bArbArA)

1. **Premessa maggiore (universale)**: Tutti gli animali sono mortali
2. **Premessa minore (universale)**: Tutti gli uomini sono animali
3. **Conseguenza (universale)**: Tutti gli uomini sono mortali

Deduzione

Apparato deduttivo

Regola di inferenza

Una **regola di inferenza** (deduttiva) R è scritta nella forma:

$$\frac{A_1 \cdots A_n}{A}$$

A_1, ..., A_n sono dette **premesse**, mentre A è detta **conclusione**.

Deduzione

Apparato deduttivo

Regola di inferenza

Una **regola di inferenza** (deduttiva) R è scritta nella forma:

$$\frac{A_1 \cdots A_n}{A}$$

A_1, ..., A_n sono dette **premesse**, mentre A è detta **conclusione**.

I 5 **ragionamenti anapodittici** degli stoici

- Se A allora B, ma A: dunque B (**modus ponendo ponens**)
- Se A allora B, ma non B: dunque non A (**modus tollendo tollens**)
- Non insieme A e B, ma A: dunque non B (**modus ponendo tollens 1°**)
- O A o B, ma A: dunque non B (**modus ponendo tollens 2°**)
- O A o B, ma non B: dunque A (**modus tollendo ponens**)

Induzione

- *Induzione* dal latino *in-ducere*, "portare dentro" o "trarre a sé".
- L'**induzione** è stata definita come una inferenza che conduce dal **particolare** all'**universale**.

Induzione

- *Induzione* dal latino *in-ducere*, "portare dentro" o "trarre a sé".
- L'**induzione** è stata definita come una inferenza che conduce dal **particolare** all'**universale**.

Esempio di C. S. Peirce

Caso	Questi fagioli vengono da questo sacchetto
Risultato	Questi fagioli sono bianchi
Regola	Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi

Induzione

- *Induzione* dal latino *in-ducere*, "portare dentro" o "trarre a sé".
- L'**induzione** è stata definita come una inferenza che conduce dal **particolare** all'**universale**.

Esempio di C. S. Peirce

Caso	Questi fagioli vengono da questo sacchetto
Risultato	Questi fagioli sono bianchi
Regola	Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi

- La regola inferita **non** è una conclusione **necessaria** a partire dalle premesse.
- L'induzione come **inferenza ampliativa ma solo probabile**.
- Esempio del **tacchino induttivista**.
- Di carattere diverso è l'**induzione matematica**.

Induzione

L'induzione matematica è una regola di deduzione.

Principio di induzione matematica

Sia $A(n)$ una asserzione sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e supponiamo che

1. $A(0)$ è vera;
2. per ogni $k \in \mathbb{N}$, se è vera $A(k)$ allora è vera $A(k+1)$.

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Induzione

L'induzione matematica è una regola di deduzione.

Principio di induzione matematica

Sia $A(n)$ una asserzione sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e supponiamo che

1. $A(0)$ è vera;
2. per ogni $k \in \mathbb{N}$, se è vera $A(k)$ allora è vera $A(k+1)$.

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Principio di induzione completa

Sia $A(n)$ una asserzione sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e supponiamo che

1. $A(0)$ è vera;
2. per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, se $A(k)$ è vera per ogni k, $0 \leq k < m$, ne segue che è vera $A(m)$.

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

Induzione

Esempio (Dimostrazione per induzione matematica)

Dimostrare attraverso l'induzione matematica che per ogni $n \geq 1$, il numero $f(n) = 10^n - 1$ è divisibile per 9.

Induzione

Esempio (Dimostrazione per induzione matematica)

Dimostrare attraverso l'induzione matematica che per ogni $n \geq 1$, il numero $f(n) = 10^n - 1$ è divisibile per 9.

- **Passo base**
  - Per $n = 1$, si ha $f(1) = 9$.
- **Passo induttivo**
  - Supponiamo che l'affermazione sia vera per $n = k$.
  - Consideriamo $f(k+1)$.
  - $f(k+1) = 10^{k+1} - 1 = 10 \cdot 10^k - 1 = 10 \cdot (10^k - 1) + 9 = 10 \cdot f(k) + 9$.
  - Poiché per ipotesi induttiva $f(k)$ è divisibile per 9,
  - allora anche $f(k+1)$ è divisibile per 9.
- Per il principio di induzione matematica, si ha che per ogni $n \geq 1$, $f(n) = 10^n - 1$ è divisibile per 9.

Induzione

L'induzione può essere usata per dimostrare proprietà dei programmi.

Esempio (Dimostrazione per induzione di invarianti di ciclo)

Consideriamo il seguente frammento di programma che calcola il quadrato di m:

```
q=0
i=0
while (i<m)
  q=q+m
  i=i+1
return q
```

Dimostriamo che al ciclo n-esimo è verificato che $A(n) = (q = n \cdot m \text{ e } i = n)$.

Induzione

L'induzione può essere usata per dimostrare proprietà dei programmi.

Esempio (Dimostrazione per induzione di invarianti di ciclo)

Consideriamo il seguente frammento di programma che calcola il quadrato di m:

```
q=0
i=0
while (i<m)
  q=q+m
  i=i+1
return q
```

Dimostriamo che al ciclo n-esimo è verificato che $A(n) = (q = n \cdot m \text{ e } i = n)$.

- **Passo base**: Per $n = 0$, $A(0)$ è verificato in quanto $q = 0$ e $i = 0$.

Induzione

L'induzione può essere usata per dimostrare proprietà dei programmi.

Esempio (Dimostrazione per induzione di invarianti di ciclo)

Consideriamo il seguente frammento di programma che calcola il quadrato di m:

```
q=0
i=0
while (i<m)
  q=q+m
  i=i+1
return q
```

Dimostriamo che al ciclo n-esimo è verificato che $A(n) = (q = n \cdot m \text{ e } i = n)$.

- **Passo base**: Per $n = 0$, $A(0)$ è verificato in quanto $q = 0$ e $i = 0$.
- **Passo induttivo**
  - Supponiamo che per $k > 0$, si ha $q = k \cdot m$ e $i = k$.
  - Quindi, all'ingresso del `while` al ciclo $k + 1$, $q = k \cdot m$ e $i = k$.
  - Nel ciclo avremo: $q = (k \cdot m) + m = (k + 1) \cdot m$ e $i = k + 1$.

Induzione

L'induzione può essere usata per dimostrare proprietà dei programmi.

Esempio (Dimostrazione per induzione di invarianti di ciclo)

Consideriamo il seguente frammento di programma che calcola il quadrato di m:

```
q=0
i=0
while (i<m)
  q=q+m
  i=i+1
return q
```

Dimostriamo che al ciclo n-esimo è verificato che $A(n) = (q = n \cdot m \text{ e } i = n)$.

- **Passo base**: Per $n = 0$, $A(0)$ è verificato in quanto $q = 0$ e $i = 0$.
- **Passo induttivo**
  - Supponiamo che per $k > 0$, si ha $q = k \cdot m$ e $i = k$.
  - Quindi, all'ingresso del `while` al ciclo $k + 1$, $q = k \cdot m$ e $i = k$.
  - Nel ciclo avremo: $q = (k \cdot m) + m = (k + 1) \cdot m$ e $i = k + 1$.
- Dunque, per il principio di induzione, si ha che per ogni n, $A(n)$ è vero.
- All'uscita del ciclo (m iterazioni), si ha $q = m \cdot m = m^2$.

Induzione

Esempio (Dimostrazione per induzione completa)

Siano n e m due interi con $m > 0$ e $n \geq 0$. Esistono due interi q e r con $0 \leq r < m$, tali che $n = m \times q + r$.

Induzione

Esempio (Dimostrazione per induzione completa)

Siano n e m due interi con $m > 0$ e $n \geq 0$. Esistono due interi q e r con $0 \leq r < m$, tali che $n = m \times q + r$.

- Dati m ed n, dobbiamo trovare q ed r per cui $n = m \times q + r$.
- **Passo base**
  - Se $n = 0$, allora $A(0)$ è verificata con $q = r = 0$ $(0 = m \cdot 0 + 0)$.
- **Passo induttivo**
  - Sia $n > 0$. Dobbiamo verificare che $A(n)$ segue dall'ipotesi che $A(k)$ è vera per ogni $k = 0, ..., n - 1$.
  - Se $m > n$, basta porre $q = 0$ e $r = n$ (infatti: $n = m \cdot 0 + n$).
  - Se $m \leq n$, allora $0 \leq n - m < n$. Per ipotesi $A(n - m)$ è vera.
  - Dunque, esistono q' e r' t.c. $n - m = m \times q' + r'$ con $0 \leq r' < m$.
  - Allora, $n = m(q' + 1) + r'$. Per cui basta porre $q = q' + 1$ e $r = r'$.
  - Dunque, abbiamo dimostrato che $A(n)$ è vera.
- Per il principio di induzione completa, si ha che $A(n)$ è vera per ogni n.

Induzione

Definizione (Formule ben formate)

L'insieme $\mathcal{F}$ delle *formule ben formate* è **definito induttivamente** come segue

1. Se A è un elemento atomico, allora $A \in \mathcal{F}$.
2. Se $A \in \mathcal{F}$ e $\star$ è un operatore unario, allora $(\star A) \in \mathcal{F}$.
3. Se $A, B \in \mathcal{F}$ e $\circ$ è un operatore binario, allora $(A \circ B) \in \mathcal{F}$.

Induzione

Definizione (Formule ben formate)

L'insieme $\mathcal{F}$ delle *formule ben formate* è **definito induttivamente** come segue

1. Se A è un elemento atomico, allora $A \in \mathcal{F}$.
2. Se $A \in \mathcal{F}$ e $\star$ è un operatore unario, allora $(\star A) \in \mathcal{F}$.
3. Se $A, B \in \mathcal{F}$ e $\circ$ è un operatore binario, allora $(A \circ B) \in \mathcal{F}$.

Principio di induzione strutturale

Per dimostrare che una proprietà P vale per ogni formula di $\mathcal{F}$ basta dimostrare

- **Passo base**
  - P vale per ogni formula atomica A.
- **Passo induttivo**
  - Se P vale per A, allora vale per $(\star A)$ per ogni operatore unario $\star$.
  - Se P vale per A e B, allora vale per $(A \circ B)$ per ogni operatore binario $\circ$.

Abduzione

- Abduzione dal latino **abductio** (condurre altrove) e dal greco **apagoghé** .
- **Charles Sanders Peirce**: Procedimento consistente nell'avanzare un'*ipotesi* esplicativa per un certo insieme di fatti osservati.

Abduzione

- Abduzione dal latino **abductio** (condurre altrove) e dal greco **apagoghé** .
- **Charles Sanders Peirce**: Procedimento consistente nell'avanzare un'*ipotesi* esplicativa per un certo insieme di fatti osservati.

Esempio di C. S. Peirce

Risultato	Questi fagioli sono bianchi
Regola	Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi
Caso	Questi fagioli vengono da questo sacchetto

Abduzione

- Abduzione dal latino **abductio** (condurre altrove) e dal greco **apagoghé** .
- **Charles Sanders Peirce**: Procedimento consistente nell'avanzare un'*ipotesi* esplicativa per un certo insieme di fatti osservati.

Esempio di C. S. Peirce

Risultato	Questi fagioli sono bianchi
Regola	Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi
Caso	Questi fagioli vengono da questo sacchetto